サイデロスタットでの太陽像の回転角

花岡庸一郎 (国立天文台)

サイデロスタットは、1 枚の鏡を用いて、太陽など天体からの光を一定の方向 (通常、水平に南方向) に反射し、固定された観測装置に光を導く装置である。常に一定の位置に像を作ることができるが、一方で像は時間とともに回転する。例えば太陽を観測した時に正しい方向の太陽像を得るには、この回転角を知る必要があるので、その計算方法について述べる。

ここでは天頂方向を観測装置の基準方向とし、天球上の北の方向を基準方向から反時計回りに測ったものを回転角とする。また、以下ではベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ のスカラー積とベクトル積を $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ で表す。

1　鏡面反射における座標系と像の向きの記述方法

まず鏡による反射における一般的な座標系と像の向きの記述を考える。サイデロスタットのように 1 枚しか鏡が無い場合には冗長と思われるかも知れないが、鏡が複数枚の場合、また偏光を考慮する場合、に容易に拡張できる記法である。図 1 のように、光学系の中の n 番目の要素が、$\boldsymbol{M}_n$ を単位法線ベクトルとする鏡であるとする。そこに単位ベクトル $\boldsymbol{Z}_n$ の方向に進む光が入射し、反射された光が単位ベクトル $\boldsymbol{Z}'_n$ の方向に進むとする。なお、入射・反射光と法線の関係は (単位ベクトルなので規格化して)

$$\boldsymbol{M}_n = (-\boldsymbol{Z}_n + \boldsymbol{Z}'_n)/|-\boldsymbol{Z}_n + \boldsymbol{Z}'_n| \tag{1}$$

である。

入射光を表す座標系として、$\boldsymbol{Z}_n$ に加えてこれに直交するベクトル $\boldsymbol{X}_n$、$\boldsymbol{Y}_n$ を定義する。$\boldsymbol{X}_n$ は入射面 (入射・反射光線を含む面) 内にあり、$\boldsymbol{X}_n\cdot\boldsymbol{M}_n \geq 0$ を満たすものとする。$\boldsymbol{Y}_n$ は $\boldsymbol{X}_n$、$\boldsymbol{Z}_n$ に直交で、右手系 $\boldsymbol{Y}_n = \boldsymbol{Z}_n\times\boldsymbol{X}_n$ の関係になっているとする。反射光についても同様に $\boldsymbol{X}'_n$、$\boldsymbol{Y}'_n$ を定義するが、$\boldsymbol{X}'_n$ は $\boldsymbol{X}_n$ がそのまま反射された形 (したがって $\boldsymbol{X}'_n\cdot\boldsymbol{M}_n \leq 0$)、$\boldsymbol{Y}'_n$ は反射した $\boldsymbol{Y}_n$ と逆向き ($\boldsymbol{Y}'_n = -\boldsymbol{Y}_n$)、と定義する。

入射光を含む座標系はこの反射に固有のものであり、その前の $n-1$ 番目の光学要素から出射される光には別の座標系 $\boldsymbol{X}'_{n-1}$、$\boldsymbol{Y}'_{n-1}$、$\boldsymbol{Z}'_{n-1}$ が対応しているものとする。$\boldsymbol{Z}'_{n-1} = \boldsymbol{Z}_n$ であり、$\boldsymbol{X}'_{n-1}$、$\boldsymbol{Y}'_{n-1}$ を $\boldsymbol{Z}'_{n-1}$ 軸周りに σ_n 回転させたものが $\boldsymbol{X}_n$、$\boldsymbol{Y}_n$ である。また $\boldsymbol{r}_n$ を、$\boldsymbol{X}_n\boldsymbol{Y}_n$ 平面上にあって観測対象の基準方向 (天球上の北など) を表すベクトルであるとする。$\boldsymbol{r}_n$ は $\boldsymbol{Z}_n$ 軸周りに $\boldsymbol{X}_n$ 軸から ρ_n 回転しているとする。同じベクトルを $\boldsymbol{X}'_{n-1}\boldsymbol{Y}'_{n-1}$ 平面上では $\boldsymbol{r}'_{n-1}$ とし、こちらは $\boldsymbol{Z}'_{n-1}$ 軸周りに $\boldsymbol{X}'_{n-1}$ 軸から ρ'_{n-1} 回転しているとする。これらの間には

$$\rho_n = \rho'_{n-1} - \sigma_n \tag{2}$$

なる関係がある。さらに反射後の $\boldsymbol{r}'_n$ は、$\boldsymbol{Z}'_n$ 軸周りに $\boldsymbol{X}'_n$ 軸から ρ'_n 回転しており、

$$\rho'_n = -\rho_n \; (= 2\pi - \rho_n) \tag{3}$$

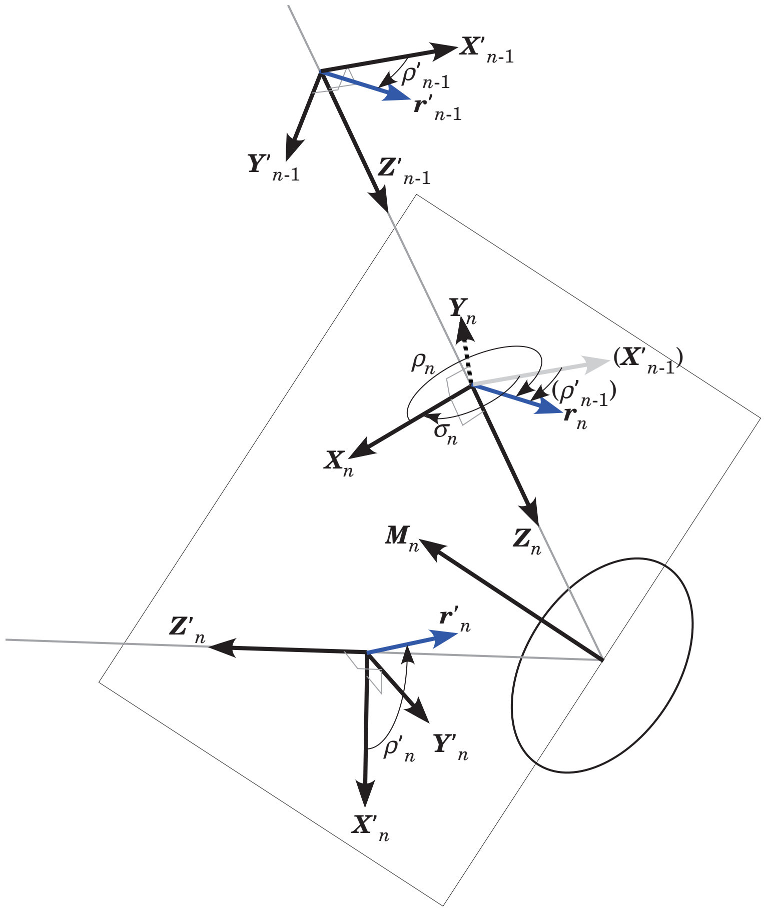

図 1: 鏡面による 1 回反射における入射光・反射光に関する座標系などの定義。$\boldsymbol{Y}_n$ は入射面の向こう側である。

である。回転角の cos、sin は

$$\cos\sigma_n = \boldsymbol{X}'_{n-1} \cdot \boldsymbol{X}_n \tag{4}$$

$$\sin\sigma_n = (\boldsymbol{X}'_{n-1} \times \boldsymbol{X}_n) \cdot \boldsymbol{Z}_n \tag{5}$$

$$\cos\rho_n = \cos\rho'_{n-1}\cos\sigma_n + \sin\rho'_{n-1}\sin\sigma_n \tag{6}$$

$$\sin\rho_n = \sin\rho'_{n-1}\cos\sigma_n - \cos\rho'_{n-1}\sin\sigma_n \tag{7}$$

である。

2　サイデロスタットにおける座標とベクトル

図 2(a) は天球上に、サイデロスタットに関連するベクトルを示したものである。$\boldsymbol{P}$ は北極方向単位ベクトル、$\boldsymbol{T}$ は太陽方向単位ベクトル、$\boldsymbol{U}$ は観測装置方向単位ベクトル (水平方向南向きとしている) である。観測地の緯度を ϕ、南から西回りに測った太陽の方位角を A、太陽高度を a としたとき、地平面上の北を x 軸、西を y 軸、天頂方向を z 軸とする座標系では以下のように表せる。

$$\boldsymbol{P} = (\cos\phi, 0, \sin\phi) \tag{8}$$

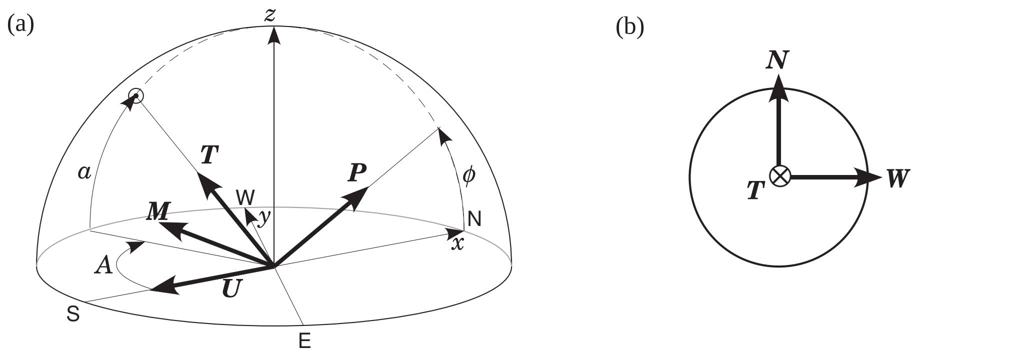

図 2: (a) 天球と、その中の北極方向ベクトル $\boldsymbol{P}$、太陽方向ベクトル $\boldsymbol{T}$、観測装置方向ベクトル $\boldsymbol{U}$、サイデロスタット鏡面の法線ベクトル $\boldsymbol{M}$。観測地の緯度を ϕ、太陽の方位角・高度を A、a としている。直交座標系は地平面北方向を x 軸、西を y 軸、天頂方向を z 軸とする。(b) 天球の中心にいる観測者から見た太陽と、西方向及び北方向のベクトル。

$$\boldsymbol{T} = (-\cos A \cos a, \sin A \cos a, \sin a) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{U} = (-1, 0, 0) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{T} + \boldsymbol{U})/|\boldsymbol{T} + \boldsymbol{U}| \tag{11}$$

また図 2(b) は天球の中心にいる観測者から見た太陽で、$\boldsymbol{N}$ は天球上の北、$\boldsymbol{W}$ は西で、

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P}/|\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P}| \tag{12}$$

である。

3　サイデロスタットによる太陽像での天球上の北の方向

以上を踏まえてサイデロスタットによる太陽像での天球上の北の方向の求め方について述べる。$n = 0$ の出射光を太陽からの光とし、まず $n = 0$ に関する座標系・ベクトルを見てみる。図 3(a) は天球の中心にいる観測者から見た太陽で、図 2(b) と同等であるので、

$$\boldsymbol{X}'_0 = \boldsymbol{W} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{Z}'_0 = -\boldsymbol{T} \tag{14}$$

また、天球上の北 $\boldsymbol{N}$ を基準方向 $\boldsymbol{r}'_{0\mathrm{N}}$ とすると

$$\boldsymbol{r}'_{0\mathrm{N}} = \boldsymbol{N} = \boldsymbol{Y}'_0 \tag{15}$$

で、$\boldsymbol{r}'_{0\mathrm{N}}$ は座標系の基準 $\boldsymbol{X}'_0$ から $\pi/2$ 回転しているので ($\rho'_{0\mathrm{N}} = \pi/2$)、

$$(\cos \rho'_{0\mathrm{N}}, \sin \rho'_{0\mathrm{N}}) = (0, 1) \tag{16}$$

である。$n = 1$ をサイデロスタットの鏡の反射面とすると、$n = 1$ に関する座標系は、$\boldsymbol{Y}_1$ が太陽方向ベクトル $\boldsymbol{T}$ と観測装置方向ベクトル $\boldsymbol{U}$ に直交することから

$$\boldsymbol{Y}_1 = (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{T})/|\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{T}| \tag{17}$$

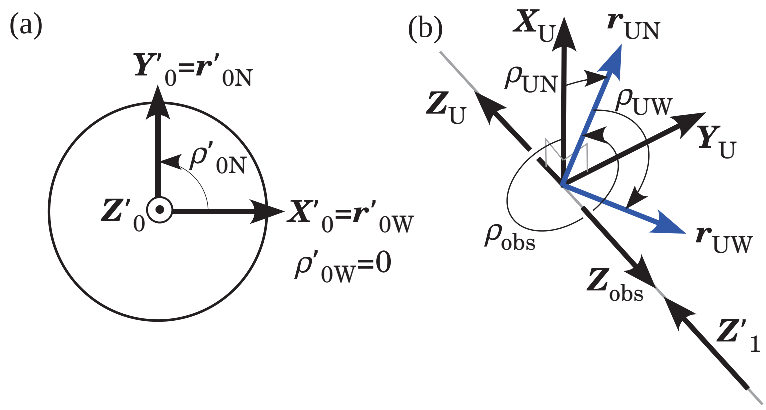

図 3: (a) 天球の中心にいる観測者から見た太陽と、太陽 (光学要素 0 とする) からの出射光の座標系。基準方向ベクトルを北方向に取ったものが $\boldsymbol{r}'_{0\mathrm{N}}$、西方向に取ったものが $\boldsymbol{r}'_{0\mathrm{W}}$ である。(b) サイデロスタット鏡からの反射光 $\boldsymbol{Z}'_1$ を受ける観測装置の座標系。

$$\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{Z}'_0 = -\boldsymbol{T} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{Y}_1 \times \boldsymbol{Z}_1 \tag{19}$$

である。また反射光については、

$$\boldsymbol{Y}'_1 = -\boldsymbol{Y}_1 \tag{20}$$

$$\boldsymbol{Z}'_1 = \boldsymbol{U} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{X}'_1 = \boldsymbol{Y}' \times \boldsymbol{Z}' \tag{22}$$

である。観測装置の座標系を、添え字 U として、図 3(b) のように天頂方向に $\boldsymbol{X}_\mathrm{U}$ 軸を取ると、

$$\boldsymbol{X}_\mathrm{U} = (0, 0, 1) \tag{23}$$

$$\boldsymbol{Z}_\mathrm{U} = \boldsymbol{Z}'_1 \tag{24}$$

である。1. の式に以上を当てはめていくと、$\cos\sigma_1$ 及び $\sin\sigma_1$、$\cos\rho_{1\mathrm{N}}$ 及び $\sin\rho_{1\mathrm{N}}$、$\cos\rho'_{1\mathrm{N}}$ 及び $\sin\rho'_{1\mathrm{N}}$、さらに $\cos\sigma_\mathrm{U}$ 及び $\sin\sigma_\mathrm{U}$ を求めることができ、最後に $\sin\rho_\mathrm{UN}$ 及び $\cos\rho_\mathrm{UN}$ を求めることができる。サイデロスタットによる太陽像は裏返しであり、ρ_UN は裏返しの画像上での北の方向の天頂方向からの回転角になるので、正しい方向で像を見た場合の北の方向の回転角 ρ_obs は $-\rho_\mathrm{UN}$ となる。

　これでもよいが、最終像の太陽の正像・鏡像の判断無しに直接計算するなら以下のようにする。図 2(b) の $\boldsymbol{N}$ だけでなく、$\boldsymbol{W}$ ももう一つの基準方向とする。図 2(b)、図 3(a) から正しい向きの太陽像から観測者へ向かうベクトルは

$$\boldsymbol{Z}_\mathrm{obs} = \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{N} \tag{25}$$

であり、これは反射の後も同様に成り立つ。$\boldsymbol{W}$ を基準方向 $\boldsymbol{r}'_{0\mathrm{W}}$ とすると $\rho'_{0\mathrm{W}} = 0$ であり、

$$\boldsymbol{r}'_{0\mathrm{W}} = \boldsymbol{W} = \boldsymbol{X}'_0 \tag{26}$$

$$(\cos\rho'_{0\mathrm{W}}, \sin\rho'_{0\mathrm{W}}) = (1, 0) \tag{27}$$

である。ここから上と同様に $\cos\rho_{1\mathrm{W}}$ 及び $\sin\rho_{1\mathrm{W}}$、$\cos\rho'_{1\mathrm{W}}$ 及び $\sin\rho'_{1\mathrm{W}}$、そして $\sin\rho_\mathrm{UW}$ 及び $\cos\rho_\mathrm{UW}$ を求めることができる。

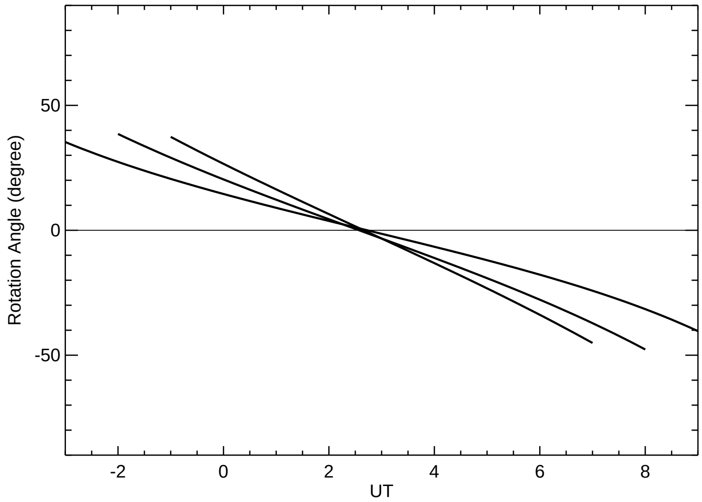

図 4: 実際の回転角の計算例。三鷹での観測で、夏至・秋分・冬至における回転角の 1 日の変化を示した。

$\boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{U}}\boldsymbol{Z}_{\mathrm{U}}$ 座標系で天球上の北と西を表すベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{UW}}$ と $\boldsymbol{r}_{\mathrm{UN}}$ は、$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{U}}$ 軸回りに $\boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}$ からそれぞれ ρ_{UW}、ρ_{UN} 回転したものであるので、

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{UW}} = \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} \cos\rho_{\mathrm{UW}} - \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} \times \boldsymbol{Z}_{\mathrm{U}} \sin\rho_{\mathrm{UW}} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{UN}} = \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} \cos\rho_{\mathrm{UN}} - \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} \times \boldsymbol{Z}_{\mathrm{U}} \sin\rho_{\mathrm{UN}} \tag{29}$$

で求められる。正しい向きの太陽像から観測者に向かうベクトル $\boldsymbol{Z}_{\mathrm{obsU}}$ は

$$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{obsU}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{UW}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{UN}} \tag{30}$$

である。$\boldsymbol{Z}_{\mathrm{obsU}}$ 回りの $\boldsymbol{X}_{\mathrm{U}}$ 軸からのベクトル $\boldsymbol{r}_{\mathrm{UN}}$ の回転角 ρ_{obs} は

$$\cos\rho_{\mathrm{obs}} = \boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} \cdot \boldsymbol{r}_{\mathrm{UN}} \tag{31}$$

$$\sin\rho_{\mathrm{obs}} = (\boldsymbol{X}_{\mathrm{U}} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{UN}}) \cdot \boldsymbol{Z}_{\mathrm{obsU}} \tag{32}$$

で計算できる。サイデロスタットの場合実際にはもちろん単に $\rho_{\mathrm{obs}} = -\rho_{\mathrm{UN}}$ である。

実際の計算例として、観測地を三鷹として夏至・秋分・冬至のそれぞれでの、サイデロスタットで導入される太陽像の天球の北の方向の、観測装置基準方向 (天頂方向) から太陽像が正しく見える向きにいる観測者から見て反時計回りに測った回転角の、1 日の変化を図 4 に示した。